Libros de texto de Matemáticas en el Bachillerato español.

Informe realizado para el Colegio Libre de Eméritos
Por Antonio Córdoba Barba
Catedrático de Análisis Matemático
Universidad Autónoma de Madrid.

Índice:

Consideraciones generales

En la elaboración de este informe se han analizado los textos de tres editoriales (Anaya, Santillana y SM) que juntas copan una parte substancial del mercado español. Una característica compartida por estos tres sellos es que sus libros no son de un único autor, sino de un grupo o equipo, a saber: José Colera, Rosario García y María José Oliveira (Anaya); Máximo Anzola y José Ramón Vizmanos (S:M.); Andrés Nortes, Pedro Jiménez, Francisco Lozano, Antonio Miñano y José A. Ródenas (Santillana). También aparecen los nombres de otros colaboradores encargados de tareas consideradas importantes, tales como: dirección editorial; dirección de arte; proyecto gráfico; imagen de cubierta; coordinación artística; dirección técnica; composición, confección y montaje; documentación y selección fotográfica; materiales didácticos complementarios; revisión científica y pedagógica y otras varias denominaciones. He contabilizado un total de veinte nombres en Anaya, en torno a sesenta en Santillana y unos cincuenta en S.M., que transmiten claramente la voluntad de querer ser obras corales.

Pero a pesar de esta variedad de cooperantes, llama la atención la estabilidad de los equipos profesionales de escritores de estos textos, que se mantienen año tras año, por varias décadas, aunque en cada edición se modifique algo el producto, pretendiendo que aparezca distinto del anterior, sin que, como luego veremos, logren eliminarse algunas persistentes ligerezas, rutinas e imperfecciones en la presentación de las diversas materias. De manera que, aunque la comunidad matemática española tenga capacidad para que apareciesen otros autores y cupiera esperar que la ley del mercado, el tiempo y la elección de los usuarios, seleccionaran los textos mejores hasta hacerlos muy buenos, no parece que esa sea precisamente la tendencia. Por el contrario, tenemos la impresión de que en las editoriales con mayor capacidad de difusión de sus productos nos encontramos ante un número reducido de equipos de escritores que no suelen renovarse mucho.

Dadas las características del mercado al que van dirigidos los libros de texto de bachillerato, con una demanda siempre asegurada, deben generar una importante cantidad de ingresos que no resultaría difícil de estimar, aunque ese no es un objetivo de este informe. Nuestro propósito será, en un principio, analizarlos desde el punto de vista de un matemático que somete a crítica la calidad de la presentación de los diversos conceptos, la idoneidad de las cadenas de razonamientos, la precisión del lenguaje y la presencia o no de elementos innecesarios y definiciones espúreas; viendo si los razonamientos deductivos resultan adecuados al nivel educativo en consideración y si ofrecen colecciones de problemas apropiados para que los alumnos adquieran y ejerciten sus destrezas. Pero también comprobar si el texto engancha, si existe una voz que transmite el interés por aprender lo que se expone, si existe un hilo argumental o si, por el contrario, el libro es una colección de apartados: ahora tocan las matrices, luego vienen las derivadas y, algo mas allá, la integral o vaya usted a saber si la combinatoria o la probabilidad.

Este análisis está centrado en los textos de la opción de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/Tecnología, aunque también se han examinado las Matemáticas de la opción B de cuarto curso de la ESO, por ser la etapa inmediatamente anterior a la que nos atañe. Una primera observación superficial muestra que, aunque existen algunas diferencias, las tres editoriales exhiben buenas calidades de papel, tipografía e ilustraciones, destacando algo en este sentido los libros de Anaya y SM sobre los de Santillana, que son, quizás, un poco más austeros. El formato es también bastante similar, demostrando claramente sus mutuas influencias que, en particular, resultan muy ostensibles en los libros de SM cuando se comparan con los de Anaya. Cada página suele tener una sección central en la que se desarrolla el tema o lección que corresponde. Los márgenes de la página son columnas en las que se suceden diversas historietas y biografías de matemáticos o se desarrollan algunos ejemplos más o menos relacionados con el tema central. Hay también fotografías, figuras y dibujos en los que suelen usarse diversos colores de tinta que hacen resaltar las distintas viñetas, en las que se utilizan también colores más neutros para subrayar las muchas definiciones o resultados que se estiman importantes y que posiblemente tengan que ser memorizados por los alumnos.

Se trata de una brillante presentación multicolor aunque, en mi opinión, corre el peligro, a la larga, de ser también un tanto mareante y distraiga la atención del alumno de ese texto central, que es donde el autor debe desarrollar el asunto y conseguir interesar a un lector que tiene que ser fascinado por aquello que, no cabe la menor duda, le va a requerir un esfuerzo entender y aprender. En general los autores pretenden redactar textos autocontenidos y que el lector pueda, por sí mismo y sin ayuda del profesor, aprender las materias propuestas. Suelen dar todas las definiciones, incluso muchas más de las que sería prudente haber introducido y, en su estilo, manifiestan una influencia de ciertas corrientes pedagógicas modernas, dando lugar a descripciones un tanto pedantes: problemas para entrenarse, para saber más, para profundizar, para investigar, etcétera.

Creo que este formato de libro de texto de Matemáticas tuvo su origen en España a mediados de los años ochenta del pasado siglo, cuando Miguel de Guzmán lideró un proyecto de la editorial Anaya marcando un estilo que fue adoptado por todos los demás escritores. Luego Miguel desapareció de los créditos, pero su fallecimiento reciente me ha impedido conocer directamente las razones que tuvo para retirarse de aquel proyecto y de sus posibles discrepancias con las versiones posteriores de la misma editorial. En cualquier caso, me parece que en un informe sobre los textos de Matemáticas en el bachillerato español hay que dejar constancia de esa huella dejada por los libros de Miguel de Guzmán, de la que son deudores los textos actuales.

Programas

Quizás la razón más poderosa para explicar las numerosas similitudes de los libros analizados radica en que han de adaptarse a los programas oficiales dictados por el Ministerio de Educación y Ciencia (BOE núm. 159, página 26097, de 4 de julio de 2003), cuya idoneidad no será objetivo de nuestro análisis. No obstante, desde los famosos episodios a que dio lugar la película Viridiana, sabemos con Buñuel que una cosa es lo que diga el programa o guión (por ejemplo, los mendigos cenan), y otra muy distinta es que luego en la película compongan una irreverente última cena parodiando la de Juan de Juanes.

He aquí los índices:

Editorial Santillana.

Primer Curso

1. Números reales
2. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas
3. Polinomios y fracciones algebraicas
4. Sucesiones numéricas. Logaritmos
5. Números complejos
6. Trigonometría

Segundo Curso

1. Sistemas de ecuaciones lineales
2. Matrices
3. Determinantes
4. Estudio general de sistemas
5. Espacios vectoriales
6. Vectores en el espacio

7. Vectores en el plano
8. Geometría analítica en el plano
9. Lugares geométricos. Cónicas
10. Funciones reales de variable real
11. Derivada de una función
12. Representación gráfica de funciones
13. Integrales
14. Estadística descriptiva bidimensional
15. Probabilidad
16. Combinatoria. Distribuciones

7. Rectas y planos en el espacio
8. Posiciones relativas de planos y rectas
9. Problemas métricos en el espacio
10. Curvas y superficies
11. Límites
12. Continuidad y derivabilidad
13. Cálculo de derivadas
14. Aplicación de la derivada
15. Integral indefinida
16. Integral definida

Editorial SM

Curso primero.

1. Números reales: operaciones.
2. Números reales: ordenación.
3. Expresiones algebraicas.
4. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.
5. Razones trigonométricas.
6. Resolución de triángulos.
7. Los vectores del plano.
8. La recta del plano.
9. Problemas métricos.
10. Cónicas.
11. Números complejos.
12. Funciones.
13. Funciones: límites y continuidad.
14. Derivadas.
15. Operaciones y cálculos con derivadas.

Curso segundo

1. Matrices
2. Determinantes
3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales
4. Curvas en el plano: lugares geométricos
5. Los vectores del espacio
6. Ecuaciones de rectas y planos
7. Posiciones de rectas y planos
8. Propiedades métricas
9. Curvas y superficies
10. Sucesiones y límites
11. Funciones, límites y continuidad
12. Tasas de variación y derivadas
13. Cálculo de derivadas
14. Funciones derivables: propiedades locales y globales

16. Monotonía y curvatura.
17. Estudio y representación de funciones.
18. Integrales indefinidas.
19. Área bajo una curva. Integral definida.
20. Distribuciones unidimensionales y bidimensionales.
21. Combinatoria.
22. Cálculo de probabilidades.
23. Distribuciones discretas. Distribución binomial.
24. Distribuciones continuas. Distribución normal.

15. Monotonía y curvatura
16. Estudio y representación de funciones
17. Integrales indefinidas
18. Métodos de integración
19. Integral definida
20. Aplicaciones de la integral definida

Editorial Anaya

Curso primero

1. Números reales.
2. Sucesiones.
3. Álgebra.
4. Resolución de triángulos.
5. Funciones y fórmulas trigonométricas.
6. Números complejos.
7. Vectores.
8. Geometría analítica. Problemas afines y métricos.
9. Lugares geométricos. Cónicas.
10. Funciones elementales.
11. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas.
12. Iniciación del cálculo de derivadas.

Curso segundo

1. Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss
2. Álgebra de matrices
3. Determinantes
4. Resolución de sistemas mediante determinantes
5. Vectores en el espacio
6. Puntos, rectas y planos en el espacio
7. Problemas métricos
8. Límites de funciones. Continuidad
9. Derivadas. Técnicas de derivación
10. Aplicaciones de la derivada
11. Representación de funciones
12. Cálculo de primitivas
13. La integral definida. Aplicaciones

Aplicaciones.

13. Distribuciones bidimensionales.
14. Cálculo de probabilidades.
15. Distribuciones de probabilidad.

En una buena parte de estos programas se continúan temas iniciados en la etapa educativa anterior (números reales y complejos, álgebra de polinomios, trigonometría), mientras que el Cálculo Diferencial, que esencialmente se aborda por primera vez en los cursos de bachillerato, es un instrumento indispensable para cualquier estudiante de Ciencias, Ingeniería o Medicina. Se trata de las Matemáticas del siglo XVII, con la noción de límite, y luego derivada e integral, que permite darle sentido a la suma, o al producto, de infinitos números. Estamos en un momento crucial en el desarrollo de la Ciencia, los albores de la revolución científica (Newton y la invención del cálculo para deducir el movimiento de los planetas) que, con un poco de imaginación, podríamos describir como el paso de la infancia matemática (sumar y multiplicar un número finito de cantidades) a una primera juventud en la que ya sabemos tratar con el infinito y podemos pasar de lo discreto a lo continuo y viceversa. Los futuros estudiantes de Ciencias y de Ingeniería tienen que aprender a manejar el Cálculo y, en el bachillerato, están, sin ninguna duda, en edad de abordarlo. Pero a la mayoría les supondrá un serio esfuerzo y, en ese sentido, sí me parece adecuado que en el programa del curso segundo se vuelva sobre lo aprendido en el primero. Aunque habrá una minoría para quienes esa repetición resulte tediosa, y poco estimulante si no va acompañada de algunas otras aventuras, que en el caso del Cálculo podrían ser sumamente interesantes. Ahí topamos quizás con una de las limitaciones del sistema español, que no parece prever la diversificación en ese sentido de excelencia que apuntamos, por lo que estos textos se limitan a exponer una versión un tanto tacaña del Cálculo Diferencial.

En la lectura se observan también algunos tics o rutinas que llaman la atención. Un caso notable es la llamada regla de Ruffini o algoritmo para dividir un polinomio por un binomio, que no es mas que una forma algo simplificada de efectuar la división por el método general, y cuya ventaja, a estos niveles, solo se me ocurre en el caso de que uno se viese confrontado con la tarea de hacer muchas, cientos, de esas divisiones. Creo que la inmensa mayoría de los investigadores matemáticos, entre los que me incluyo, no recordamos de memoria tal algoritmo, aunque seguramente nos llevaría unos segundos obtenerlo, y, desde luego, lo consideramos una observación menor.

Resulta por tanto desproporcionado que la llamada Regla de Ruffini ocupe un lugar preeminente en los textos (Anaya 1, página 71; SM1, página 41; Santillana 1, página 56), se haga un énfasis especial en su enseñanza en los Institutos y Colegios, y sea percibida por los alumnos como algo muy notable, que han de saber acerca del álgebra de los polinomios.

El análisis y la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales (aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius) es un tema considerado muy importante y al que se da un tratamiento extenso en el programa. Se trata de una rutina que los alumnos suelen aprender a manejar bien, aunque no logren entender adecuadamente el concepto de rango o el de determinante. Pero, como existe la tradición de que el examen de selectividad incluye siempre la discusión de un sistema dependiente de parámetros, los textos analizados le dedican una atención a este asunto que juzgamos desmesurada, y que no contribuye a hacer especialmente interesante el estudio de las Matemáticas.

Otro caso digno de ser reseñado son las leyes de los grandes números, de cuya importancia no cabe la menor duda, por cuanto se encuentran en la base teórica de toda la ciencia experimental. Su naturaleza es, sin embargo, algo elusiva de entender y formular. La descripción que de ellas se hace en los libros de texto de bachillerato es errónea y consiste en la cantinela de que la frecuencia converge a la probabilidad. Pero eso, como cualquier estudiante despierto puede observar, es falso, al menos cuando la convergencia se entiende como la de las sucesiones de su libro, por cuanto lanzando al aire una moneda podría ocurrir, aunque sea poco probable, que siempre nos salga cara. ¿Es la ley débil de los grandes números demasiado complicada para el estudiante medio de bachillerato y debería ser eliminada del programa?, ¿O, por el contrario, su enseñanza es adecuada y los libros de texto deberían hacer un esfuerzo por explicarla bien en casos sencillos? El programa de Estadística y Probabilidad del curso 1 del bachillerato contiene muchos conceptos y desarrollos (probabilidad condicionada, teorema de Bayes, distribuciones discretas, como la binomial, y continuas, incluyendo a la normal, la ley débil de los grandes números y, en algunos textos, incluso se incluye una versión del teorema central del límite o del límite central, según los gustos de cada cual). Notable y, al menos en la parte discreta, asequible a estos alumnos. Pero algo excesivo cuando se considera dentro de todo el programa de ese primer curso, en el que no me extrañaría que quedase demediado y relegado a unas pocas jornadas lectivas o incluso, como me han informado algunos profesores de estas enseñanzas a quienes he consultado, no quede nunca tiempo para abordarlas.

En torno a los objetivos

La Lengua y las Matemáticas son los pilares de la ilustración y juntas desempeñan un papel fundamental en los primeros niveles de la enseñanza. Conocer las destrezas aritméticas elementales es indispensable para desempeñar las actividades cotidianas de cualquier ciudadano, como también lo es el conocimiento del cálculo diferencial, al menos en sus niveles más sencillos, para quienes deseen tener una preparación técnica o científica, por rudimentaria que esta sea. Pero la contribución de las matemáticas a la educación ciudadana tiene también otros registros que atañen al buen funcionamiento del cerebro: a saber detectar cuando unas consecuencias se siguen de unas hipótesis establecidas y poder enlazar varios silogismos para llegar a una conclusión, o, por el contrario, hacer saltar las alarmas cuando alguien nos está induciendo a unas conclusiones falaces que no se siguen de los supuestos de partida. Cualquier materia bien presentada puede cumplir esa función, pero las Matemáticas están especialmente indicadas para implantar el sistema operativo en el cerebro humano, por ser generalmente sencillos sus conceptos y claras sus definiciones, a diferencia de otras disciplinas en donde el lenguaje es más barroco y confuso.

Estudiando las propiedades de los números enteros y de las figuras geométricas elementales se pueden engarzar cadenas de silogismos, y llegar a conclusiones interesantes y nada triviales. Es la grandeza de las demostraciones matemáticas, del método deductivo, del principio de la razón suficiente de Leibnitz, que, administrado en las dosis oportunas, constituye la mayor contribución de las Matemáticas a la educación de los ciudadanos. Pues bien, en los libros de texto que hemos estado analizando las demostraciones brillan por su ausencia. Un ejemplo significativo es la introducción del número e, la base de los logaritmos neperianos, que en estos textos es presentado, con buen criterio, como uno de los números más importantes en cuyas propiedades está basada una gran cantidad de resultados del cálculo diferencial. Definen el número e como el límite de la sucesión cuyo término enésimo es la enésima potencia del número 1+1/n y lo justifican viendo que los valores sucesivos que van tomando esos números cuando n=1, 2,…,10 indican su convergencia al valor 2,78… Pero no se plantean probarlo, algo que, por lo demás, sería perfectamente asequible a un buen porcentaje de alumnos de ese nivel, como lo era en mis tiempos de estudiante de bachillerato, cuando se aprendía la demostración en el curso quinto, dirigido a ciudadanos de entre quince y dieciséis años de edad.

En uno de los textos de primero de bachillerato he encontrado tan solo dos demostraciones, una es interesante y atañe al llamado teorema de los senos en la geometría de los triángulos, pero la otra consiste en la prueba de que si el número “a” es menor que el “b”, entonces, cualquiera que sea el número “c”, resulta que “a+c” es siempre menor que “b+c”. El argumento es de una naturaleza tan perogrullesca que transmite el mensaje erróneo, y pernicioso, de que las demostraciones son casi una redundancia, que lo importante son los hechos y lo que podemos ir sacando de ellos, sin preocuparnos demasiado de las pruebas, porque estas, llegado el caso, resultan obvias. Todos conocemos esas deducciones falaces en las que muchos ciudadanos suelen enredarse (“*todos los catalanes son ahorradores, porque hay dos en mi barrio que…*”, o “*llovió después de la procesión, por lo que el santo hizo el milagro de la lluvia*” o esa tendencia de nuestros políticos a “*rebatir*” los argumentos de sus oponentes descalificándolos personalmente, etcétera). Pues bien, las Matemáticas debieran ser un terreno para detectar todas estas falacias, precisamente porque allí todo tiene que ser rigurosamente probado y, sin necesidad de llenar los textos de demostraciones muy complicadas, no debiera caerse en el extremo opuesto de eliminarlas o de dar argumentos falsos. Volviendo de nuevo al número e, observemos que lo que presentan los libros analizados (ya que cuando n es 1, 2,…, 10 todo parece ir bien, concluimos que siempre lo va a seguir siendo), no difiere esencialmente de esa cantinela de quien afirma que "*todos los banqueros son unos usureros, porque ayer, al ingresar un talón, me cobraron una comisión excesiva*". El estudio de las matemáticas debe enseñar, entre otras cosas, que la mejor manera de demostrar que hay banqueros honestos consiste en exhibir un ejemplo.

In medias res: una lectura crítica de los textos

Lo que sigue no pretende ser un análisis exhaustivo de estos libros, sino tan solo resaltar algunos párrafos y llamar la atención sobre algunas de sus afirmaciones y desarrollos que chocan a los ojos de un matemático, pero cabría añadir muchos más ejemplos de los que a continuación son reseñados. Tampoco se trata de hacer una crítica especialmente dura a unos libros que cumplen una función importante y que, entre otras virtudes, proveen a los profesores que han de impartir estas asignaturas, y a sus alumnos, con un guión y unas abundantes colecciones de ejercicios. Resultan también agradecidas las múltiples viñetas, anécdotas y sucintas biografías de matemáticos, muy similares en todos ellos, que son agradables de leer y ayudan a ilustrar a los alumnos y humanizan el contenido más austero del texto. Pero, en cualquier caso, nuestra opinión es que las presentaciones son muy mejorables y el lenguaje podría ser más sencillo y preciso. Se echa de menos una voz sabia que introduzca la acción como algo sumamente interesante de conocer y que nos merezca la pena el esfuerzo de aprenderla. Habida cuenta de que estos libros tienen tanta influencia, y se modifican ligeramente todos los años, podemos, y creo que debemos, exigirles una presentación exquisita. En lo sucesivo nos referiremos a los textos analizados usando las abreviaciones obvias siguientes: ANA1, ANA2, SANT1, SANT2, SM1, SM2.

Veamos:

En el primer bloque (Aritmética y álgebra) de ANA1 nos encontramos con el concepto de sucesión, dice así: "*Se llama sucesión a un conjunto de números dados ordenadamente, de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,…*". Mientras que en SANT1, página 70, se afirma: "*Un conjunto de números reales ordenados de forma que no exista la menor duda sobre cuál es el primero de esos números, cuál es el segundo…, o cualquier otro, se dice que es una sucesión*".

En un primer análisis parecerían definiciones correctas, pero no lo son tanto. La razón estriba, por un lado, en que, en sentido estricto, una sucesión de números reales no es un conjunto de números reales. Es un conjunto pero de otros objetos algo más complicados. Veamos: en la sucesión 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, … solo aparecen los tres números 1, 2 y 3, por lo que, como conjunto, tiene solamente esos tres elementos, como también los tiene la sucesión 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3,…., que, naturalmente, es distinta de la anterior. Por otro lado, algún alumno espabilado podría preguntarse si ½, 2/3, ¾, 4/5, 5/6, … 1, es, o no es, una sucesión de números reales.

Quizás nos parezca una sutileza sin consecuencias mayores y la clave esté en lo de "*conjunto ordenado*". Pero tampoco radica ahí la explicación y ese concepto nos llevaría a otros jardines no menos frondosos: ¿qué es un orden en un conjunto y cuántos tipos de ellos podemos tener…? Aunque no es nuestra tarea arreglar estos estropicios, en este caso cabría una solución sencilla, por ejemplo: decir que una sucesión de números reales es una "fila o hilera de uno en uno" de tales números; de manera que a cada natural n le corresponde un único término de la fila, que llamamos a_n y, viceversa, todo término de la fila consiste en un número real con una etiqueta, o número natural, que indica su posición en la fila. A continuación, si queremos, podemos observar que, en realidad, una sucesión es una función definida en los naturales y con valores en el conjunto de los números reales etcétera, etcétera. Por cierto, esta es la que aparece correctamente en SM1, página 174; aunque allí se empeñen en precisar que las sucesiones empiezan todas con a_1 y no con a_0 o con a_m, como, por otro lado, suele ocurrir muchas veces. Pero también creo, sinceramente, que se podría obviar dar una definición precisa de un concepto tan intuitivo como es el de sucesión y utilizarlo como sinónimo de fila o hilera sin entrar en más elucubraciones. Ahora bien, si se da una definición, y esta se enmarca y subraya para que la memoricen los alumnos, entonces hay que exigir que esté bien hecha.

El error cometido al precisar la noción de sucesión trae luego consecuencias. Un ejemplo es la noción de "*término general*". En ANA1 se da la definición siguiente: "*Se llama término general de una sucesión, y se simboliza con a_n al término que representa a uno cualquiera de ella*". De nuevo un alumno espabilado podría preguntarse qué demonios quiere decir "*representar a uno cualquiera de ella*", sobre todo cuando estamos en el reino de las matemáticas donde debemos aspirar siempre a saber de lo que estamos hablando. A continuación, en el mismo texto, se afirma que "*Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula $a_n = f_n$. Dándole a n un cierto valor natural, se obtiene el término correspondiente*". Mirémosla con detalle: parece clara si nos restringimos a ejemplos sencillos, la fórmula x+1 da lugar a la sucesión 2, 3, 4,…., pero las fórmulas pueden ser mas complicadas. Sea C el número de Chaitin de una máquina universal de Turing dada y consideremos la fórmula f(n) =

enésima cifra decimal de C, surge la pregunta: ¿Hemos definido una sucesión de números? ¿Qué fórmulas nos sirven para definir sucesiones?, ¿Qué es una fórmula?

Creo que la ligereza en dar una definición inadecuada de sucesión lleva luego a meternos en unos universos de complicación exagerada.

En el mismo texto ANA1, página 53, se presenta un ejercicio resuelto cuya confusión resalta. Dice así: "*Dar el término general de la sucesiones que no sean recurrentes*: a) 1, 4, 9, 16, 25, 36,…; b) 2, 4, 8, 16, 32, 64,..; c) 1, -3, 9, -27, 81,…; d) 2, 4, 6, 10, 16, 26,…"

La solución del ejercicio que aparece en la misma página da a entender, con toda claridad, que la única recurrente en esa lista de sucesiones es la d) (quizás porque en ella cada término es la suma de los dos anteriores). Pero no así las otras, de las que se aporta la fórmula de su término general. Ahora bien, ¿por qué no son recurrentes las demás? Según la definición que se adjunta en esa página "*las sucesiones cuyos términos se obtienen operando dos o más de los anteriores se llaman recurrentes. En ellas no es nada fácil obtener el término general. Si este no se conoce, para hallar un término hay que obtener, previamente, todos los anteriores*". Se trata de una curiosa definición, se mire por donde se mire, que nos deja perplejos, entre otros asuntos, sobre el mínimo, dos o más, de términos que es necesario involucrar para tener una sucesión recurrente. En cualquier caso, siguiendo sus exigencias miremos la sucesión a) que empieza con los cuadrados, y observemos que cada término puede calcularse a partir de los dos precedentes por la sencilla receta de multiplicar el inmediato anterior por dos, restarle al resultado el término que ocupa dos lugares menos y, finalmente, sumar a lo obtenido el número 2: $a_n = 2\ a_{n-1} - a_{n-2} + 2$. En cuanto a la sucesión b), todo indica que tenemos la identidad $b_n = b_{n-1} + 2\ b_{n-2}$, y así sucesivamente. Es decir, que todas son recurrentes según la definición del texto, y el ejercicio carece de sentido.

Pero el problema tiene más enjundia. Se pide hallar el término general de una sucesión de la que solo se dan unos pocos términos. Por ejemplo, en el caso a) podría parecernos lógico inferir que estamos ante la sucesión de los números cuadrados. Pero, ¿por qué no en la sucesión cuyo enésimo término es el cuadrado de n más la parte entera de n dividido por 7, u otra fórmula ad hoc que se nos ocurra? Pensándolo bien, ese ejercicio intenta darle dignidad matemática a la burda falacia de quien afirma que todos los políticos son unos corruptos porque conoce a unos cuantos que lo son.

En la sección 2 del Bloque 1 (Aritmética y álgebra, página 31), de SM1, bajo el epígrafe "*Representación de raíces cuadradas: teorema de Pitágoras*", se afirma que Fermat, considerado juntamente con Descartes entre los más grandes matemáticos del siglo XVII, demostró el siguiente teorema: "*Todo número positivo puede expresarse como suma de cuatro cuadrados como máximo*".

Pues bien, como dicen ahora los castizos: *va a ser que no*. En primer lugar, el gran Pierre de Fermat no demostró esa afirmación. Me parece que, seguramente, los autores habrían querido referirse a un conocido teorema de Lagrange, quien es también un famoso matemático francés, aunque del siglo XVIII, que dice así: "*Todo número natural puede escribirse como suma de cuatro cuadrados*", entendiéndose, en este enunciado, que el 0 es el primero de los naturales, como es habitual hacerlo entre los matemáticos. En el caso de tener el capricho de excluir al 0 del conjunto de los naturales, el teorema habría que enunciarlo de forma ligeramente diferente: "*Todo número natural puede escribirse como suma de, a lo más, cuatro cuadrados*". Pero ninguna de esas dos versiones excluye que haya números que puedan ser expresados por medio de una suma de más cuadrados, como le ocurre al número 5 = 1 + 1+ 1+ 1+ 1, o de muchos mas si añadimos tantos ceros como queramos. No es exactamente lo mismo "*a lo más*" que "*como máximo*" y en esa diferencia radica el que haya que hacer verdaderos equilibrios para, con muy buena voluntad y agarrándonos al carácter no excluyente que en matemáticas le damos a la disyunción, pudiéramos dar por válido el enunciado de un texto, que, juzgándolo con mucha generosidad, presentaría de manera intrincada un teorema cuya formulación debiera ser sencilla pero cuya demostración está muy por encima del nivel del bachillerato, por lo que suele explicarse en los cursos de Teoría de los Números (generalmente optativos) de las licenciaturas de Matemáticas.

Pero, al margen de lo retorcido del enunciado, no se entienden las razones que se puedan tener para usar el teorema de Lagrange a la hora de representar gráficamente las raíces cuadradas. Esta misión se puede llevar a cabo con el mucho más básico Teorema de Pitágoras, como se hace también en estos textos. Si el teorema de Lagrange fuese cierto (que no lo es) con tres cuadrados, cabría invocarlo, aún cuando su demostración necesita conceptos y métodos mucho más avanzados que los del bachillerato, para mostrar que toda raíz cuadrada fuese la medida de la diagonal de un prisma de lados enteros, dentro del espacio tridimensional. Pero, al necesitarse cuatro cuadrados, el prisma tendría que ser dibujado en un espacio de cuatro dimensiones, con lo que perderíamos la gracia de la intuición geométrica.

La sección 3 del Bloque 1 de SANT1 está dedicada a "*polinomios y fracciones algebraicas*" y en el esquema de la unidad con el que se inicia se incluye, entre otros temas, la regla de Ruffini a la que hicimos referencia anteriormente. En la definición que se da de polinomio (Pág.52) se detalla que los coeficientes son números reales arbitrarios y se pasa a describir las operaciones (suma, resta, producto y división) de tales polinomios. Las propiedades observadas aparecen en unos recuadros que, entendemos, realzan su importancia. En uno de ellos (Pág. 57) se afirma que "*si el número a es una raíz entera de un polinomio P(x), entonces a es divisor del término independiente de P(x)*". Ahora bien, como el texto no ha hecho ninguna reflexión previa acerca de la clase mas reducida de los polinomios con coeficientes enteros, la afirmación anterior no se sostiene, o carece de significado, por cuanto entre los números reales siempre podemos efectuar la división exacta si el divisor es distinto de cero.

Otro descuido, quizás de tono menor, está en la definición de grado de un polinomio, donde se explica que el grado de una constante, por ejemplo el polinomio R(x) = 6 es 0, lo que es correcto, pero nos deja la duda de cuál es el grado del polinomio nulo, que, como sabemos, no puede ser 0 si ha de verificarse la propiedad de que el grado del producto sea igual a la suma de los grados. Mas adelante, en la sección dedicada a la factorización de un polinomio se introduce la noción de polinomio irreducible. De nuevo aparece la confusión de cual es el anillo de coeficientes, porque no es lo mismo ser irreducible en Z(x), Q(x), R(x) o C(x). En el texto se afirma que el polinomio x^2+2 es irreducible (lo que es cierto en R(x)), pero la razón que parece darse (no tener raíces reales) es a todas luces insuficiente en el caso general, como un sencillo ejemplo puede mostrar. Esta confusión se proyecta entonces sobre las fracciones algebraicas (pasemos por alto su definición como fracciones que tienen polinomios en el numerador y en el denominador), de nuevo no está claro lo que se entiende por fracción irreducible o el concepto de mínimo común múltiplo de polinomios al que se refiere una de las viñetas. En ANA 1, página 70, también se afirma sin demostración, y sin especificar el tipo de coeficientes, que un polinomio se puede descomponer en producto de irreducibles y, además, que esa descomposición es única; pasándose en la página 72 a concluir que una fracción algebraica se convierte en irreducible al dividir el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos, siendo esta última una noción, como mencionamos antes en SANT1, poco apropiada en el contexto de este libro. Y es que difícilmente pueda estar bien definida al nivel en el que se presentan los polinomios en el bachillerato.

Una característica que comparten estos libros de texto es el énfasis en dar numerosas definiciones, casi siempre enmarcadas en un rectángulo o subrayadas en color, que parece que haya que memorizar. Algunas responden a conceptos importantes, pero encontramos también muchas otras que son un tanto superfluas e innecesarias. Un ejemplo es la de polinomio incompleto (o completo) según tenga (o carezca) de coeficientes nulos. Otra es la proliferación de nombres para las ecuaciones de una recta, además de los establecidos (explícita, implícita y paramétrica), tenemos "*ecuación punto tangente*", "*ecuación vectorial*", "*ecuación canónica*" "*ecuación segmentaria*", "*ecuación continua*" o "*ecuación general*" etcétera. Por cierto, la tradición o rutina de seguir clasificando los vectores en fijos y libres, que nadie de estos autores de libros de texto parece poner en cuestión, produce algunas situaciones chuscas. Por ejemplo: en la definición de equipolencia de vectores fijos se afirma que "*el sentido de un vector fijo AB es el que va del origen al extremo*", como si los sentidos fuesen entes viajando de un lugar a otro. El término lugar geométrico, que forma parte del lenguaje tradicional, es sinónimo de subconjunto de puntos del espacio (o del plano, según la dimensión de que se trate) y no debiera merecer más comentarios. En estos textos, sin embargo, queda enmarcado y subrayado como algo que hay que memorizar: "*Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una o más condiciones dadas*", lo que, por lo demás es correcto, aunque totalmente obvio. Siguiendo con esta tendencia a dar definiciones de todo, resalta la clasificación de las ecuaciones en diversos tipos: lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, radicales,…etcétera. Por ejemplo, en SM 1, página 55, se afirma lo siguiente: "*ecuaciones radicales son aquellas en las que aparece la incógnita, en algunos de sus términos, bajo el signo radical*". Luego en la página 57 se da la definición de ecuaciones exponenciales de las que se pone el ejemplo $2^x = 8$. Pero un alumno podría legítimamente preguntarse si $2^{\sqrt{x}} = 8$ es radical, exponencial o si, por el contrario, habría que definir también el tipo de radicales-exponenciales o exponenciales-radicales. ¿De que tipo es la ecuación log(1+ exp(x)) = 20? Cada una de estas objeciones es de un tono menor y aisladamente no tendrían demasiada importancia. Sin embargo, su reiteración da lugar a textos un tanto barrocos, poco limpios, que no ayudan a presentar de forma interesante lo que se quiere transmitir.

Otro asunto es la ausencia de demostraciones: en SANT1, página 161, se discute acerca de los elementos notables de un triángulo, y se dan fórmulas para determinar el circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro. Pero, aunque estas sean propiedades lindas de los triángulos, creo que lo más interesante es que se pueda probar rigurosamente que las tres mediatrices (o las bisectrices, o las medianas o las alturas) de un triángulo se corten en un punto y no tanto aceptar ese hecho, que es dudoso que un ciudadano vaya a usar después, y entrenarse en el manejo de unas fórmulas dadas en forma de ucase.

Esa aversión a las demostraciones que hemos ido detectando encuentra una de sus cimas en la presentación del número e, base de los logaritmos neperianos y de la función exponencial: y = exp(x) que es, quizás, la más importante del cálculo. En SM1, página

195, se afirma, sin justificación, que existe el límite de la sucesión cuyo término general es a(n) = potencia enésima de 1 más 1/n y que ese número tiene un desarrollo decimal que empieza así 2,781828… A renglón seguido, y dentro de un recuadro coloreado, se informa a la parroquia de que: "*Al límite de esa sucesión se le llama número e y se le representa por la letra e. El número e es un número real, pero irracional. Es decir, es un número con infinitas cifras decimales no periódicas*". En ANA1, página 61, se considera también "*El número e, que ya conoces de cursos anteriores y que hemos utilizado en la unidad anterior como base de los logaritmos neperianos, se obtiene como límite de una sucesión*". A continuación se escribe el término general y se calcula, con la ayuda de una calculadora, los cinco primeros términos, además del décimo, el centésimo, el milésimo, el millonésimo y el milmillonésimo. De esos valores se saca la conclusión: "*Parece evidente que convergen a e = 2.78182…*" Y eso es todo.

Resulta notable la oportunidad perdida de usar la fórmula del binomio de Newton para entender la sucesión, observando que es monótona creciente, que esta acotada y que su límite es la suma infinita de los recíprocos de los factoriales y, si se me apura un poco, no cuesta mucho demostrar, y ello es perfectamente asequible a un joven de esas edades aspirante a científico o técnico, que el número e no puede ser racional. Y aunque pensemos que la demostración pueda ser difícil para la mayoría (aunque no imposible), habrá una minoría que sí la entenderá y, junto con los demás, quizás puedan apreciar el arte de engarzar correctamente los argumentos y las ideas en un tema que desempeña un papel básico en el desarrollo del Cálculo Diferencial tratado en esos mismos textos. Por ejemplo, cuando abordan el problema de derivar las funciones exponencial y logarítmica.

Otro punto delicado que está pobremente resuelto en estos libros atañe al cálculo del límite del cociente sen(x)/x cuando la variable x tiende al valor 0. Llama un tanto la atención el tratamiento tan detallista que se hace de las diferentes vicisitudes en las que puede aparecer la noción de límite (por la derecha, por la izquierda, o ser infinito con signo positivo o negativo), así como las recetas para tratar diversas indeterminaciones. Pero llegados al punto crucial de hallar el límite de sen(x)/x lo despachan escribiendo la cadena de desigualdades: $\text{sen}(x) \leq x \leq \text{tang}(x)$. La primera de las cuales se puede entender fácilmente con una figura, aunque ahí tendríamos una buena oportunidad para recapacitar sobre qué es medir la longitud de un arco y su relación con la noción de límite (que es de lo que se trata en estas lecciones), pero la segunda no es tan evidente como pretenden estos textos. Es cierta y su demostración, asequible a los estudiantes del bachillerato, podría ser utilizada también para ilustrar las nociones de proyección, medida y límite, así como para enseñar que las Matemáticas no consisten solamente en una colección de definiciones y normas de uso, que es como se presenta en Cálculo en este primer curso del bachillerato, postergando para el segundo cualquier justificación de las reglas de derivación.

En SM1, página 203, se presenta en negritas, de nuevo enmarcada y subrayada en color, la definición de "*funciones equivalentes en un punto*" que, según se dice, lo son "*si el límite de su cociente en dicho punto es 1*". Pues bien, nadie puede impedirnos introducir esa notación, pero la tradición aconseja utilizar el término "asintóticas". En SANT1, página 220, aparece el epígrafe "*Derivadas aplicando la regla de los cuatro pasos*" cuyo carácter perogrullesco no tiene desperdicio. Dice así:

"*Para calcular la derivada de f(x) en un punto hemos utilizado la expresión:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))/h$$

Vamos a obtener procedimientos de derivación que permitan calcular la derivada de una función, utilizando los cuatro pasos siguientes:

1. *Función incrementada: f(x+h).*
2. *Incremento de la función: f(x+h)-f(x).*
3. *Cociente incremental: (f(x+h)-f(x))/h*
4. *Límite del cociente incremental, cuando h tiende a cero.*

En la página 222 de SM2, encontramos, enmarcada y coloreada, la noción de sucesión divergente (*"Las sucesiones que tienen como límite +infinito o –infinito se dice que son divergentes*") que difiere de la habitual, donde divergente es simplemente la negación de convergente e incluye, por lo tanto, muchas otras vicisitudes. En el mismo libro, dos páginas más adelante aparece enmarcado el texto siguiente: "*Una expresión es indeterminada cuando no se puede tener el límite utilizando directamente las operaciones aritméticas con los límites de cada uno de los operandos*". ¿Aclara o no aclara esta definición? ¿Qué es un operando? Afortunadamente, luego presenta varios ejemplos de lo que se quiere explicar, y están bien; pero no comprendo la necesidad de llenar los textos de tantas definiciones innecesarias. Siguiendo con el mismo libro, en su página 346 se lee lo siguiente: "*La operación que permite obtener una primitiva F(x) a partir de una función f(x) recibe el nombre de integración. Si existe la función F(x), se dice que la función f(x) es integrable*". Pues bien, esta afirmación no se corresponde con el uso habitual que la palabra "integrable" tiene en diversas teorías matemáticas y me parece poco afortunada, teniendo en cuenta, además, que todas las funciones consideradas en este nivel de enseñanza son continuas, o continuas a trozos, y, por lo tanto, "integrables". Otra cuestión muy distinta es que su primitiva pueda escribirse de forma sencilla con el conjunto de funciones de las que se dispone en el libro.

En SANT1, página 194, se introduce la noción de función algebraica en varios pasos. El primero es muy claro ("*Funciones polinómicas son aquellas cuya expresión algebraica es un polinomio*"), salvo quizás por lo de "expresión algebraica" que queda algo indefinida pero que no cuesta mucho, creemos, inferir su significado en este caso. En el segundo se nos informa de que las "*funciones racionales son aquellas cuya expresión algebraica es un cociente de polinomios* f(x) = P(x)/Q(x)". Creo que también podemos aceptarla entendiendo lo que dice. Pero llegamos a la definición tercera: "*Funciones irracionales son aquellas en cuya expresión algebraica aparece la variable independiente x bajo el signo radical*: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ". Y ahora sí que nos encontramos en una situación confusa en la que agradeceríamos saber lo que se entiende por "expresión algebraica": ¿es f(x) = raíz cuadrada de exp(x) una función algebraica irracional según esta definición? Creemos, de nuevo, que no hay necesidad de introducir una noción que es más sutil de lo que aquí se presenta y que no enriquece ni ayuda a la compresión de la materia.

En SANT2, página 28, se inicia el estudio de las matrices y, sin más motivación, al lector se le viene encima un aluvión de definiciones: matriz fila, columna, cuadrada, traspuesta, simétrica, antisimétrica, nula, diagonal, unidad o identidad, triangular (superior o inferior) etcétera. Luego aparecen los determinantes, que están definidos en el caso 2x2 y 3x3 con reglas ad hoc, quedando un poco confusa su definición en dimensiones mayores aunque, eso sí, se da luego, sin justificar, una receta para calcularlos. En la página 38 se recuadra la definición importante de rango: "*El rango o característica de una matriz A es el número de filas, o de columnas, que son linealmente independientes. Se representa por rang(A)*". Pero en ningún momento se plantean la legalidad de tal definición, que consistiría en demostrar fehacientemente que los números de filas, y el de columnas, linealmente independientes coinciden realmente. Luego ese resultado desempeñará un papel importante en el teorema de Rouché-Frobenius y en la discusión de los sistemas lineales que, ahora sí, son considerados una parte importante del curso y tratados exhaustivamente porque, entre otras razones, suelen formar parte de las cuestiones habituales de la Selectividad. De manera similar se procede en SM2, aunque en este caso se añaden dos estrategias que permiten alterar una matriz sin que cambie su rango (página 21). En ANA2 se da una definición similar y se concluye que el "*rango de una matriz es el máximo de orden de sus menores no nulos*", tampoco se añade la demostración completa pero, en este caso, se avisa de que habría que hacerlo, y se verifica en un caso concreto de una matriz 5x4.

En ANA2, página 239, SANT2, página 246, y en SM2, página 245, se abordan dos teoremas básicos acerca del comportamiento de las funciones continuas, que suelen asociarse, respectivamente, a los nombres de Bolzano y de Weierstrass, y cuyas demostraciones son omitidas, aunque luego esos resultados son invocados en repetidas ocasiones en el desarrollo del Cálculo (teoremas de Rolle y valor medio). En principio, parece que no habría mayor inconveniente en dar unos argumentos "intuitivos", basados en la imagen de curva continua, para transmitir la verdad de esos teoremas básicos, pero, por otro lado, se pierde una magnífica oportunidad para que los alumnos recapitulen sobre los números reales, teniendo en cuenta que ya los han estudiado en Matemáticas de 4º de la ESO y en el primer capítulo de estos cursos que estamos analizando. Por cierto, en ambas ocasiones se usan los desarrollos decimales para introducir los números irracionales, lo que es un método legítimo, salvo por el detalle de que *antes de tener hay que ser* y la definición que se enmarca en todos estos textos ("*Un número irracional es el que tiene un desarrollo decimal no periódico*") es muy criticable desde ese legítimo punto de vista. La construcción de los reales es quizás algo complicada para ser tratada a fondo en el bachillerato pero, puesto que aparece ya en varios cursos anteriores, se podría ahora ir un poco más lejos en el estudio de los desarrollos decimales (aproximaciones por defecto y exceso, geometría de los intervalos decimales) y conectarlos con la noción de límite que es también un tema central del programa. De ahí a los reales hay solo un paso que, dado con cuidado, permitiría a estos alumnos tener una idea de quien es, por ejemplo, el número $\pi^{\sqrt{2}}$, habida cuenta de que están aprendiendo a derivar, entre otras muchas, a la función $y = a^x$.

En SANT2, página 270, se discuten los teoremas llamados de Lagrange y de Cauchy y que son descritos de la manera siguiente:

"*Teorema del valor medio o de Lagrange: Sea f(x) una función continua en (a, b) y derivable en (a, b), entonces existe un punto c, perteneciente al intervalo (a, b), que verifica:*

f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)"

Antes de demostrar este teorema, vamos a estudiar una generalización del mismo, llamada teorema de Cauchy:

"*Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en (a, b) y derivables en (a, b). Si f´(x) y g´(x) no se anulan simultáneamente en un mismo punto de (a, b) y g´(x) no se anula en dicho* *intervalo, siendo g(b) distinto de g(a), entonces existe un punto c en (a, b) que verifica: (f(b)-f(a))/(g(b) – g(a)) = f´(c)/g´(c)”*

Obviemos por un momento la cuestión de si el segundo teorema merece llevar el nombre de Cauchy y fijémonos en sus hipótesis: si la derivada de g no se anula en el intervalo (a, b) difícilmente se va a anular simultáneamente con la de f en algún punto. Por otro lado, el llamado teorema de Rolle que aparece en la página anterior del mismo texto, nos asegura que si la derivada de g no se anula en (a, b) entonces g no puede tomar valores iguales en los extremos. Es decir que las hipótesis son redundantes y, siguiendo al gran Ockam, conviene tener un enunciado mucho más limpio e interesante. ¿Qué necesidad hay de complicar el teorema del valor medio de este modo? Francamente no vemos el punto, por cuanto el aquí llamado teorema de Cauchy (supuestamente más general que el de Lagrange) resulta ser también una consecuencia inmediata de este y de la regla de derivación de una función inversa.

En ANA2, página 330, SANT2, página 302, y SM2, página 346, se vuelve sobre la noción de función primitiva, que también es denominada integral indefinida, que ya había sido introducida en el primer curso: “F *es función primitiva de* f *si* F´=f”. A continuación se introduce la notación “*integral de* f = F + k”, que se justifica afirmando que F y F+k tienen la misma derivada, por ser la derivada de una constante igual a cero. Pero, en puridad, ese argumento no basta para justificar la notación y el que se necesita es el recíproco: si una función tiene derivada cero en todos los puntos de un intervalo entonces es allí una constante.

Etcétera, etcétera.

Conclusiones

1.- Los textos examinados presentan unas buenas calidades de impresión, papel y encuadernación. Las ilustraciones son muy abundantes y se utilizan tintas de diversos colores para encuadrar y subrayar las numerosas definiciones y consignas. La organización espacial de las páginas suele contener un núcleo central, donde se desarrolla el tema específico de la lección, que está acompañado por unas columnas marginales en las que se insertan biografías de matemáticos, historias, leyendas y ejercicios resueltos. Aunque haya diferencias entre las tres editoriales, la semejanza de estilo es, sin embargo, notable. Destaca la encuadernación de los libros de SM. Los de Santillana son algo más austeros, quedando Anaya en una posición intermedia desde este punto de vista. Todos contienen una abundante colección de ejercicios, de enunciados muy similares en los tres libros, que seguramente será muy útil y facilitará la labor de profesores y alumnos.

2.-Los temas desarrollados son, en general, Matemáticas anteriores al siglo XVIII que ya han sido recogidos correctamente en multitud de tratados clásicos, por lo que llama la atención la cantidad de ligerezas e incorrecciones halladas, así como la persistencia de algunas rutinas y el excesivo empeño definidor, generando multitud de conceptos innecesarios o vanos que, convenientemente subrayados, parece que el alumno tenga que memorizar. En algunos temas la presentación es poco limpia, distrayendo la atención de los puntos más importantes y poniendo mucho más énfasis en las normas de uso que en la naturaleza de las ideas matemáticas involucradas. Los autores pretenden que el lector pueda, por sí mismo, y sin ayuda del profesor, aprender las materias propuestas. Lo definen todo, yendo incluso más allá de lo que la prudencia recomendaría, y manifiestan una influencia clara de las corrientes pedagógicas más pedantes: ejercicios para entender, para saber más, para profundizar, para ir más allá, etcétera. Aunque los seis textos analizados inciden en estas objeciones, los de Anaya son, quizás, un poco mejores que los de las otras dos editoriales.

3.-Las demostraciones que presentan una mínima dificultad han sido eliminadas de los textos de bachillerato, en los que las Matemáticas consisten en el aprendizaje de una serie de conceptos (con sus definiciones subrayadas), junto a un conjunto de instrucciones, o normas de uso, estableciéndose luego algunas conexiones entre ellos y mostrando su utilidad para poder resolver diversos problemas y ejercicios. En este sentido no parece haber mucha diferencia con la manera de presentar otras disciplinas, Química o Biología, por ejemplo. Al prescindir de las demostraciones se escamotea el carácter deductivo de las matemáticas, que es, sin embargo, una de las mejores contribuciones de esta ciencia al proceso educativo, no sólo para un futuro ingeniero, médico o científico, sino para todo ciudadano culto.

Un ejemplo significativo es la discusión de un sistema de ecuaciones lineales, dependiendo de unos parámetros, que es presentado en forma de un conjunto de instrucciones que la mayoría aprende de manera rutinaria y que son útiles para aprobar el examen de selectividad. Haciendo ahora abstracción de que el método involucra a conceptos tales como el rango de una matriz, o el de determinante, que los alumnos de bachillerato tendrán dificultad en entender, aunque aprendan a usarlos, no parece que el objetivo de discutir un sistema de tales ecuaciones sea, por sí mismo, lo suficientemente atractivo para que estimule el interés de los estudiantes por las Matemáticas, y no está justificada la importancia que adquiere en el programa.

4.-Los defectos y ligerezas que hemos detectado no impiden que haya secciones presentadas correctamente, ni tampoco descalifican totalmente a estos textos que, seguramente, podrán ser utilizados con provecho por profesores y alumnos. Pero, incluso en las secciones mas correctas, se echa en falta la existencia de una voz (la del autor, quien conociendo el tema en profundidad, porque lo "ha vivido" y pensado y forma parte de su experiencia), nos guía haciéndonos ver lo que es fundamental y fascinante, y nos descubre las conexiones, a veces ocultas, a veces transparentes, que hay entre los conceptos, el lenguaje y las técnicas que aprendemos y los asuntos y las preguntas interesantes que desearíamos conocer.

Aunque hay otros muchos, un ejemplo especialmente significativo que ya hemos mencionado antes atañe al momento más estelar de la Ciencia y se remonta al siglo XVII, cuando el gran Newton crea (junto con Leibnitz) una nueva Matemática, el Cálculo Diferencial, y lo aplica con éxito al problema de entender la dinámica del universo, mostrando con unas sencillas ecuaciones como son las trayectorias de los astros, las secciones cónicas, cuya naturaleza analítica permite hacer previsiones y nuevos descubrimientos. Pues bien, al Cálculo Diferencial están, en gran parte, dedicados los dos cursos de Matemáticas del Bachillerato. También se estudian en él las secciones cónicas y sus propiedades, pero a ninguno de nuestros autores se les ha ocurrido establecer la conexión oportuna y hacer el esfuerzo de presentarla. Al menos los estudiantes más brillantes deberían ser expuestos a esa maravilla como muestra fehaciente del poder del Cálculo que están aprendiendo.

Una mirada al exterior

Las reflexiones presentadas en esta sección han sido realizadas después de terminado el informe contenido en los párrafos anteriores de este escrito. Lo que ha sido motivado, en parte, por la circunstancia de que los libros ingleses y franceses no han estado en mi poder hasta varias semanas después de concluir el análisis de los textos españoles; pero también por la decisión conscientemente tomada de considerar primero a estos últimos aisladamente, con el fin de analizarlos desde el punto de vista de un matemático que los juzga por sí mismos, sin añadir condiciones de contorno.

En lo que sigue no se pretende llevar a cabo una crítica exhaustiva de estos textos (extranjeros), sino poner de relieve algunas de sus peculiaridades más relevantes, sobre todo a tenor de lo observado en los libros del bachillerato español.

Los textos ingleses nos han sido amablemente proporcionados por el Runnymede College (British Internacional School) y por el King College, ambos de Madrid. Estos colegios usan en su docencia la colección HEINEMANN MODULAR MATHEMATICS, FOR ENEXCEL AS AND A-LEVEL. Los textos franceses que nos han sido recomendados por el Liceo Francés de Madrid son los siguientes: HYPERBOLE, MATHEMATIQUES 2DE; TRANS MATH 1reS y TRANS MATH TermS (Obligatoire), todos ellos de la editorial NATHAN.

Una característica que comparten estos libros franceses e ingleses es el carácter colectivo de su autoría, que también hemos detectado antes entre los españoles. Entre los autores ingleses aparecen: Keith Pledger, Greg Attwood, Alistair Macpherson, Bronwen Moran, Joe Petran, Geoff Staley y Dave Wilkins. Entre los franceses podemos señalar a: Raymond Barra, Jean-Michel Barros, Patrick Bénizeau, Jacques Burgaud, Jean Morin, David Nivaud, Joël Malaval, Dense Courbon, Alain Colonna, Jean-Mar Lécole, Jacques Noailles y Claire Tardy. Pero luego presentan diferencias notables de estilo, sobre todo en los textos ingleses, que difieren ostensiblemente en su forma de presentación de las matemáticas de la que utilizan los libros franceses y españoles que, en este aspecto, son mucho más afines. Esto resulta patente incluso en la estética general y en la manera de distribuir las páginas, que es bastante más austera y lineal en el sistema inglés, mientras que en los textos franceses y españoles se utilizan muchos colores y una organización más compleja, y quizás algo mareante, del espacio escrito. En cuanto a la calidad de la impresión, del papel, la encuadernación y la abundancia y colorido de las ilustraciones, destacan los productos editoriales españoles.

Entre los textos ingleses encontramos una sucesión de cuatro libros (C1, C2, C3 y C4) subtitulados "Core Mathematics" que contienen lo que podríamos llamar el programa "básico" de Matemáticas del Bachillerato, al que se añaden otras tres series bajo el epígrafe de Matemáticas Aplicadas, y que constan de cuatro unidades de estadística (S1, S2, S3, S4); dos de Matemáticas de la Decisión (D1, D2) y seis de Mecánica. Entre todas cubren el programa del bachillerato español que hallamos en los textos de Anaya, Santillana y SM. Entiendo, pero esto es una hipótesis mía no contrastada, que los temas de Mecánica estarán en el modelo español asignados al área de Física, mientras que seguramente el programa de Física inglés se decanta más por la parte experimental, dejando para las aplicaciones del cálculo diferencial los aspectos más teóricos, y creo que esa debe ser la razón de que aparezcan esos textos (M1,..,M6) entre los de Matemáticas. La idea, no obstante, es muy interesante desde el punto de vista de la docencia de las matemáticas, porque provee a los alumnos con toda una serie de aplicaciones relevantes del Cálculo. Empero, una de las diferencias que presenta el modelo inglés respecto de los otros dos, es la existencia de unos cursos, con sus correspondientes libros, titulados “Further Pure Mathematics”. Estos textos, cuyos programas pasamos a describir, están dirigidos a una minoría de estudiantes que destacan en Ciencias y están interesados en realizar estudios en universidades de primera fila:

FPM 1:

1. Inequalities.
2. Series
3. Complex numbers.
4. Numerical solution of equations.
5. First order differential equations.
6. Second order differential equations.
7. Polar coordinates.

FPM2:

1. Hyperbolic functions.
2. Differentiation.
3. Integration.
4. Coordinate systems: Intrinsic coordinates and radius of curvature.

FPM3:

1. Maclaurin and Taylor series.
2. Complex numbers.
3. Matrix algebra.
4. Vectors.
5. Numerical methods (step by step methods to solve ODE).
6. Proofs (Induction method).

Estamos pues ante un sistema que permite diversificar la enseñanza ofreciendo a los mejores estudiantes la posibilidad de ir mucho más allá en el estudio de las Matemáticas, incluyendo temas como Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos que no tienen cabida en los programas españoles. De la lectura de los textos se desprende también que el sistema descansa sobre un sistema de exámenes (Edexcel) que se llevan a cabo simultáneamente en todos los colegios ingleses y que son calificados por unas comisiones nacionales. Entre los méritos de sus autores aparece destacado en la portada el haber sido miembros de esas comisiones de calificación. Superar con buena nota los exámenes de "Further Pure Mathematics" es un *sine qua non* para ingresar en universidades como Oxford o Cambridge.

La existencia de ese sistema de exámenes resulta también muy ostensible en la redacción de los textos, cada uno de los cuales es presentado como un vehículo para aprender lo que el alumno tiene que saber para superar con éxito el examen del nivel al que corresponde. Una lección puede empezar con un párrafo del estilo siguiente: "*Ud. puede definir las coordenadas de un punto de una curva usando ecuaciones paramétricas. En tales ecuaciones paramétricas, las coordenadas x e y vienen expresadas como x=f(t) e y=g(t), donde la variable t es el parámetro*". A continuación ofrece varios ejemplos cuidadosamente desarrollados de tales representaciones y sigue con una recomendación: "*Ud. necesita adquirir la habilidad de poder usar las ecuaciones paramétricas para resolver problemas geométricos*". Luego presenta varios ejemplos de ese uso y muestra como calcular áreas y longitudes. La lección concluye con una generosa colección de ejercicios y con un sumario de los puntos considerados importantes, que resumen lo que el alumno ha aprendido. Las páginas, que no están tan atiborradas de información como en el estilo francés y español, suelen presentar de manera muy clara la cuestión en querella, que es analizada y resuelta en varios ejemplos bien escogidos, y dejan muy claro qué es lo que el alumno tiene que aprender a resolver. Por lo que he podido constatar, las definiciones están reducidas a lo mínimo indispensable y, en general, son correctas. Los textos están concebidos como esas notas que un alumno aventajado sabe tomar de la explicación de un buen profesor, pero no pretenden suplantar a este, dejando a su albedrío la elección de anécdotas, historias y biografías que tenga a bien añadir, para aclarar e ilustrar los puntos que el alumno tiene que aprender y que están luego bien resaltados y desarrollados en el texto.

Como hemos señalado antes, los libros franceses difieren mucho de los ingleses. En ellos encontramos bastantes muestras de esa jerga pedagógica de la que también están impregnados los españoles. Así los problemas o ejercicios no son simplemente fáciles o difíciles, sino: "*pour comprendre*", "*savoir faire*", "*maîtriser le cours*", "*apprendre à chercher*" o "*pour progresser*" etcétera. Empero, la diferencia de nivel respecto a los españoles resulta notable. Baste señalar el siguiente "*Avant-proposs*" que encontramos en la primera página de TRANS MATH TERM S (Obligatoire):

"*Nous définissons donc l´exponentielle comme une solution de l´équation differentielle y´= y. Mais nous ne demonstrerons pas son existence,….*

Nous admettrons donc jusqu´au bout dans le cours l´existence de exp e définirons aussitôt ln comme sa reciproque…..

Nous donnons en anexe les preuves de l´existence e de la derivabilité de chacune de ces deux fonctions… «

En el capítulo 2, página 40, del mismo libro y bajo el epígrafe de "*Des limites remarquables*", se da un argumento correcto y adecuado para calcular el límite de sen(x)/x cuando x tiende a 0.

En la página 97 nos encontramos con el tema: "*Des encadrements de e. Irrationalité de e*". Continuando en la página 98 con la demostración de las desigualdades:

$(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$

1 + 1/1! + ½! + … + 1/n! < e < 1 + 1/1! + ½! +…. + 1/n! + 1/n!

De las que obtienen la expresión de e como suma de una serie que les permite probar su irracionalidad.

En TRANS MATH 1S (páginas 140, 142) encontramos la siguiente descripción y definición:

Une suite est une liste ordonnée de nombres. Fabriquer une suite u_n, cést associer a chaque entier n un réel noté un.

Definition : Une suite est une fonction dont l´ensemble de définition est l´ensemble N des entiers naturels ou N privé des entiers 0, 1, 2, …, n.

El nivel matemático de los textos franceses está pues por encima del que se pretende conseguir en los españoles, no sólo por la claridad y precisión de sus definiciones, como muestran los ejemplos antes señalados, sino porque aquí no se eluden las demostraciones. En la página 200 del libro que estamos comentando se lee lo siguiente:

Théorème 6.- *f est une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par G(x) = F(x) + k, où k est une constante réelle.*

Démonstration.-

F est dérivable sur I et F¨= f. La fonction G est aussi dérivable sur I avec G´= F´ = f. Donc G est une primitive de f sur I.

Inversement, si G est une primitive de f sur I alors G´-F´=0. La dérivée de G-F est constante sur I : il existe un réel k tel que pour tout x dans I, G(x)-F(x)=k, d´où le résultat.

El texto sigue con las demostraciones de otros muchos teoremas, lemas y corolarios. Uno puede tener reservas acerca de si ese nivel es apropiado para la mayoría de los estudiantes o si, por el contrario, está dirigido a los mejores. Pero observemos el empeño en tener un concepto preciso de la función exponencial, del número e, de lo que es una sucesión, o dando una demostración, sencilla pero correcta, de la propiedad de las funciones primitivas, que contrasta con el fárrago que hemos detectado en los libros españoles que hemos analizado.

Madrid, 30 de Octubre de 2007.